4° Μάθημα

4/11/2019

ΣΥΣΤΗΜΑ ΕΞΥΠ

Αφίξεις Poison(λ) λ: ρυθμος μέσης αφιξης στη μον. χρόνου

$$P=\begin{pmatrix} b_0 & b_1 & b_2 & b_3 \\ b_0 & b_1 & b_2 & b_3 \\ 0 & b_0 & b_1 & b_2 \end{pmatrix}$$

$b_k = P(B=k) = P($k αφίξεις κατά τη διάρκεια μιας εξυπηρ.$)$

(i) Χρόνος εξυπηρέτησης είναι σταθερός $= t$ χρον. μον.

$b_k = P($να έχω k αφίξεις στον χρονο εξυπ. $t)$

$= P($να έχω k αφίξεις χρησιμ. των Poison$(\lambda t))$

$\frac{\lambda^x e^{-\lambda}}{x!}$

$$\frac{(\lambda t)^k e^{-\lambda t}}{k!}, \quad k=0,1,2,\ldots$$

(ii) Ο Χρόνος εξυπ. μπορεί να είναι $t_1, t_2, \ldots, t_m$ χρον. μονάδες με αντίστοιχες πιθανότητες $P_1, P_2, \ldots, P_m$ όπου $P_1+P_2+\ldots+P_m=1$

$$P(T=t) = \begin{cases} P_1 & t=t_1 \\ P_2 & t=t_2 \\ \vdots & \\ P_m & t=t_m \end{cases}$$

$\sum P(A|B_i)P(B_i)$

Θ.Ο.Π.

$b_k = P($να έχω k αφίξεις κατά τη διάρκεια μιας εξυπηρέτησης$) =$

$$= \sum_{i=1}^{m} P(\text{να έχω k αφίξεις κατά τη διάρκεια μιας εξυπ.} / T=t_i) \cdot P(T=t_i) =$$

$$= \sum_{i=1}^{m} \frac{(\lambda t_i)^k \cdot e^{-\lambda t_i}}{k!} \cdot P_i$$

(iii) Ο Χρόνος εξυπηρέτησης ακολουθεί μια συνεχή καταν με σ.π.π. $b(t) > 0$

$b_k = P$(να έχω κ αφίξεις κατά τη διάρκεια μιας εξυπ.)

$= \int_0^{+\infty} P\left(\begin{array}{l} \text{να έχω κ αφίξεις κατά} \\ \text{τη διάρκεια μιας εξυπ.} \end{array} \Big/ T=t \right) b(t)\, dt$

$$= \int_0^{+\infty} \frac{(\lambda t)^k e^{-\lambda t}}{k!} b(t)\, dt$$

(iv) Ο χρόνος εξυπ. ακολ. $b(t) = \mu \cdot e^{-\mu \cdot t}$, $t>0$.

$$b_k = \int_0^{+\infty} \lambda^k \cdot \frac{t^k e^{-\lambda t} \mu \cdot e^{-\mu t}}{k!} dt$$

$$b_k = \frac{\lambda^k \cdot \mu}{k!} \int_0^{+\infty} t^{k+1-1} e^{-(\lambda+\mu)t} dt =$$

$X \sim \text{Γαμμα}(a, \theta)$

$f_X(x) = \dfrac{x^{a-1} e^{-x/\theta}}{\theta^a \Gamma(a)}$, $x \geq 0$

$\downarrow$

μοιάζει με σ.π.π. Γαμμα$\left(k+1, \dfrac{1}{\lambda+\mu}\right)$

αλλά δεν έχει στον παρανομαστή το $\theta^a \Gamma(a)$

αλλά $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{x^{a-1} e^{-x/\theta}}{\theta^a \Gamma(a)} dx = 1$ $\rightarrow$ από $\displaystyle\int_{\pi.o.} f_X(x) = 1$

$\displaystyle\int_0^{+\infty} x^{a-1} \cdot e^{-x/\theta} = \theta^a \cdot \Gamma(a)^{-1}$

$$= \frac{\lambda^k \cdot \mu}{\cancel{k!}} \frac{1}{(\lambda+\mu)^{k+1}} \Gamma(\cancel{k}+1)$$

Μαρκοβιανή Αλυσίδα για περισσ. από 2 καταστάσεις

$S' = \{0, 1, 2, \dots\}$

$$P = \begin{bmatrix} P_{00} & P_{01} & P_{02} & \dots \\ P_{10} & P_{11} & P_{12} & \dots \\ P_{20} & P_{21} & P_{22} & \dots \\ \dots & & & \end{bmatrix}$$

1° ερώτημα: $P(X_n = j) = P_j^{(n)}, \ j = 0, 1, 2, \dots$

$$\begin{cases} P_0^{(n)} = P(X_n = 0) = P_0^{(n-1)} \cdot P_{00} + P_1^{(n-1)} P_{10} + P_2^{(n-1)} \cdot P_{20} + \dots \\ P_1^{(n)} = P_0^{(n-1)} P_{01} + P_1^{(n-1)} P_{11} + P_2^{(n-1)} \cdot P_{21} + \dots \\ P_j^{(n)} = P_0^{(n-1)} \cdot P_{0j} + P_1^{(n-1)} P_{1j} + P_2^{(n-1)} \cdot P_{2j} + \dots \\ \quad j = 2, 3, \dots \end{cases}$$

$$P_j^{(n)} = \left(P_0^{(n-1)} \ P_1^{(n-1)} \ P_2^{(n-1)} \ \dots \right) \begin{pmatrix} P_{0j} \\ P_{1j} \\ P_{2j} \\ \vdots \end{pmatrix} =$$

$$= P^{(n-1)} \begin{pmatrix} P_{0j} \\ P_{1j} \\ P_{2j} \\ \vdots \end{pmatrix} \rightarrow j+1 \text{ στήλη του } P$$

Άρα $P^{(n)} = \left(P_0^{(n)} \ P_1^{(n)} \ P_2^{(n)} \ \dots \right)$ απέδειξα ότι είναι

$P^{(n)} = P^{(n-1)} \cdot P = \dots = P^{(0)} P^{(n)}$

όπου $P^{(0)} = \left(P_1^{(0)} \ P_1^{(0)} \ P_2^{(0)} \ \dots \right)$ το διαν. των αρχικών πιθ.

→ στις εξετάσεις αρκεί να πω με τι ισούται ο κάθε όρος.

2^o ερώτημα: $P(X_n=j \mid X_0=i) = p_{ij}^{(n)}$

$$P(X_n=0) = p_0^{(n)} = p_0^{(0)} \cdot p_{00}^{(n)} + p_1^{(n)} \cdot p_{10}^{(n)} + p_2^{(0)} \cdot p_{20}^{(n)} + \dots$$

$$p_1^{(n)} = p_0^{(0)} \cdot p_{01}^{(n)} + p_1^{(0)} \cdot p_{11}^{(n)} + p_2^{(0)} \cdot p_{21}^{(n)} + \dots$$

$$p_j^{(n)} = p_0^{(0)} p_{0j}^{(n)} + p_1^{(0)} p_{1j}^{(n)} + p_2^{(0)} p_{2j}^{(n)} + \dots$$

$$\Rightarrow p_j^{(n)} = \left(p_0^{(0)} \quad p_1^{(0)} \quad p_2^{(0)} \quad \dots\right) \begin{pmatrix} p_{0j}^{(n)} \\ p_{1j}^{(n)} \\ p_{2j}^{(n)} \\ \vdots \end{pmatrix}$$

$$p^{(n)} = p^{(0)} \begin{bmatrix} p_{00}^{(n)} & p_{01}^{(n)} & p_{02}^{(n)} \\ p_{10}^{(n)} & p_{11}^{(n)} & p_{12}^{(n)} \\ p_{20}^{(n)} & p_{21}^{(n)} & p_{22}^{(n)} \\ \dots & \dots & \dots \end{bmatrix}$$

Ομως θεω προηγ. απόδ. $p^{(n)} = p^{(0)} \cdot P^n$

Αυτό σημαίνει ότι:

$$\rightsquigarrow P^n = \begin{bmatrix} p_{00}^{(n)} & p_{01}^{(n)} & \dots \\ p_{10}^{(n)} & p_{11}^{(n)} & \dots \\ p_{20}^{(n)} & p_{21}^{(n)} & \dots \\ \dots & \dots & \end{bmatrix}$$

$$\rightsquigarrow p^{(n)} = p^{(0)} \cdot P^n$$

$p_{ij}^{(n+m)}$ = να πάω από το i στο j σε n+m βήματα

$= \sum_{\ell \in S} p_{i\ell}^{(n)} p_{\ell j}^{(m)}$

$\downarrow$ (ij) στοιχείο του πίνακα $P^{n+m} = P^n P^m$ Chapman Kolmogorov

2 3

Γιάννενα || Αλεξανδρούπολη

Ορισμοί Επικοινωνίας:

1^{os}) Η κατάσταση $j \in S$ ονομάζεται προσιτή από την $i \in S$ αν $\exists\ n \geq 0$ τ.ω. $P_{ij}^{(n)} > 0$. Συμβολισμός: $i \to j$
Υπάρχει "δρόμος" για να πάω από την $i \to j$ με οποιοδήποτε αριθμό βημάτων.
$n=0$ όταν $i=j$

2^{os}) Οι καταστάσεις $i, j \in S$ επικοινωνούν αν $i \to j$ κ' $j \to i$
Δηλ. $\exists\ n \geq 0 \quad P_{ij}^{(n)} > 0$ → Συμβολισμός: $i \leftrightarrow j$
$\exists\ m \geq 0 \quad P_{ji}^{(m)} > 0$

Πρόταση: Μια σχέση επικοινωνίας είναι σχέση ισοδυναμίας.
(i) Ανακλαστική $i \leftrightarrow i$
(ii) Συμμετρική $i \leftrightarrow j \Rightarrow j \leftrightarrow i$
(iii) Μεταβατική $i \leftrightarrow j \quad j \leftrightarrow k \Rightarrow i \leftrightarrow k$

Αποδ:
(i) Άμεσο $P_{ii}^{(0)} = 1$
(ii) $i \leftrightarrow j \quad \exists\ n \geq 0 \quad P_{ij}^{(n)} > 0$
$\exists\ m \geq 0 \quad P_{ji}^{(m)} > 0$
$j \leftrightarrow k \quad \exists\ \ell \geq 0 \quad P_{jk}^{(\ell)} > 0$
$\exists\ \xi \geq 0 \quad P_{kj}^{(\xi)} > 0.$

Ο.δ.ο. $i \to k$ και $k \to i$
Αρκεί ν.δ.ο. $\exists\ x \geq 0 \quad P_{ik}^{(x)} > 0$
$\exists\ y \geq 0 \quad P_{ki}^{(y)} > 0$
Ξέρω ότι $P_{ij}^{(n)} > 0$, $P_{jk}^{(\ell)} > 0$

$$\sum_{s \in S} P_{is}^{(n)} P_{sk}^{(\ell)} = P_{ik}^{(n+\ell)} \geq P_{ij}^{(n)} P_{jk}^{(\ell)} > 0.$$

$$\sum \quad = P_{ki}^{(\xi+m)} \geq P_{kj}^{(\xi)} P_{ji}^{(m)} > 0.$$

Παρατήρηση: Οι καταστάσεις που επικοινωνούν μεταξύ τους φτιάχνουν μια κλάση ισοδυναμίας επικοινωνούντων καταστάσεων

3ος) Αν μια Μαρκοβιανή αλυσίδα έχει όλες τις καταστάσεις της να ανήκουν σε μια και μόνη κλάση ισοδυν. επικ. καταστάσεων τότε λέγεται μη διαχωρίσιμη (δεν ξεχωρίζει) διαφορετικά λέγεται διαχωρίσιμη.

Στην ασκ. 14 από αυτές που μας έδωσε υπάρχει:

$$P = \begin{array}{c} \\ 0 \\ 1 \\ 2 \\ 3 \\ \\ \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{cccccc} 0 & 1 & 2 & 3 & 4 & \end{array} \\ \left[\begin{array}{cccccc} 1/2 & 1/2 & 0 & 0 & \cdots & \\ 2/3 & 0 & 1/3 & 0 & \cdots & \\ 3/4 & 0 & 0 & 1/4 & \cdots & \\ 4/5 & 0 & 0 & 0 & 1/5 & \cdots \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \end{array}\right] \end{array}$$

$$P_{k0} = \frac{k+1}{k+2}, \quad k = 0, 1, \ldots$$

$$P_{k(k+1)} = 1 - \frac{k+1}{k+2} = \frac{1}{k+2}$$

Από το 3 πάω στο 1?
$3 \to 0 \to 1$

$$\begin{tikzcd} 0 \arrow[loop above] \arrow[r, leftrightarrow] & 1 \arrow[r] & 2 \arrow[r] \arrow[ll, bend left] & 3 \arrow[lll, bend left] \end{tikzcd}$$

$0 \to 2$

$\exists n > 0 \quad P_{02}^{(2)} > 0$

$2 \to 0$

$\exists m > 0 \quad P_{20}^{(1)} > 0$

$m = 1$

Σε αυτό το πίνακα όλες οι πιθ. επικοινωνούν μεταξύ τους. άρα είναι μη διαχωρίσιμη. Μαρκοβιανή αλυσίδα.

Ορισμοί Επαναληψιμότητας:

$p_{ij}^{(n)} = P(X_n = j \mid X_0 = i)$

$f_{ij}^{(n)} = P(X_n = j \quad X_r \neq j \ \forall\, r < n \mid X_0 = i)$

$= P($ξεκινώντας από το i να πας στο j στο n-οστό βήμα για 1η φορα$)$

Γενικά: $p_{ij}^{(n)} \neq f_{ij}^{(n)}$

Συμβολίζω με $f_{ij}^{*} = \sum_{n=1}^{+\infty} f_{ij}^{(n)}$

$f_{ii}^{*} = \sum_{n=1}^{+\infty} f_{ii}^{(n)}$

1ος) Η κατάσταση i λέγεται επαναληπτική αν και μόνο αν $f_{ii}^{*} = 1$

2ο) Η κατάσταση i λέγεται παροδική αν-ν $f_{ii}^{*} < 1$

3ος) Η κατάσταση i λέγεται Θετικώς Επαναληπτική αν-ν $\mu_i = \sum_{n=1} n f_{ii}^{(n)} < +\infty$

4ος) Η κατάσταση i λέγεται Αδαφώς Επαναληπτική αν-ν $\mu_i = \sum_{n=1} n f_{ii}^{(n)} = +\infty$

Πάμε στην Ασκ 14

i. Είναι η αλυσίδα μη διασπ? Απαντήθηκε

ii. Να χαρακ. την κατασ. 0 ως προς την επαναληψιμότητα με βάση τον αριθμό

Εδώ ισχύει η 1η διαδρομή

$$P_{00}^{(2)} = P\left(0 \begin{array}{l} \to 0 \to 0 \\ \to 1 \to 0 \end{array}\right)$$

Λύση: $f_{00}^{*} = ?$ $(\mu_0 = ?)$

$$f_{00}^{*} = \sum_{n=1}^{+\infty} f_{00}^{(n)}$$

$$f_{00}^{(1)} = P(0 \to 0) = 1/2$$

$$f_{00}^{(2)} = P\left(0 \begin{array}{l} \to 0 \to 0 \\ \to 1 \to 0 \end{array}\right) = \frac{1}{2} \cdot \frac{2}{3}$$

άκυρο! θέλω να καταλήξω 1η φορά στο 0

$$f_{00}^{(3)} = P(0 \to 1 \to 2 \to 0) = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{3} \cdot \frac{3}{4}$$

$$f_{00}^{(n)} = \frac{n}{(n+1)!}$$

$$f_{00}^{*} = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{n}{(n+1)!}$$

Μας δίνεται στις εξετάσεις ο τύπος: $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{n!} - \frac{1}{(n+1)!} \right) = 1$

$$\sum \frac{(n+1)! - n!}{n!(n+1)!} = \sum \frac{n!(n+1) - n!}{n!(n+1)!} = \sum \frac{\cancel{n!}((n+1)-1)}{\cancel{n!}(n+1)!}$$

Επίσης δίνεται: $\sum_{n=1}^{\infty} n \underbrace{\left(\frac{1}{n!} - \frac{1}{(n+1)!} \right)}_{f_{00}^{(n)}} = e-1$

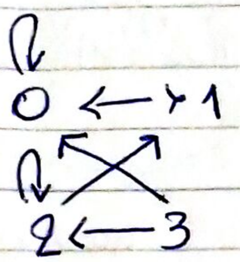
άρα $\mu_0 = e-1$ πεπερασμένο

άρα θετ. επαναληπτική

Μπορούμε να προσπαθήσουμε την ασκ. 15

Παράδειγμα

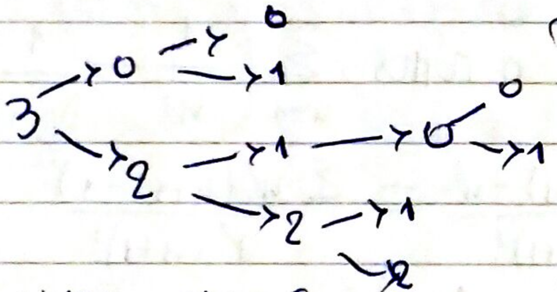
$$P = \begin{array}{c} \\ 0 \\ 1 \\ 2 \\ 3 \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{cccc} 0 & 1 & 2 & 3 \end{array} \\ \begin{bmatrix} 1/2 & 1/2 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1/3 & 2/3 & 0 \\ 1/2 & 0 & 1/2 & 0 \end{bmatrix} \end{array}$$



$\left.\begin{array}{l} 2 \to 0 \\ 0 \not\to 2 \end{array}\right\} \Rightarrow$ $0 \leftrightarrow 2$ ΔΕΝ ΙΣΧΥΕΙ άρα διαχωρίσιμη.

ούτε οι $2 \not\leftrightarrow 3$ επικοινωνούν

Θα δω την επαναληψιμότητα για την κατάσ. 3.
δηλ. την $f_{33}^{(n)}$



δεν $\exists$ αριθμός πα να πηγαίνει στην 3 $\Rightarrow$
$f_{33}^{(n)} = 0$

Η 3 είναι παροδική
Θα εξετάσω την 2: $f_{22}^{(n)} = ?$

$f_{22}^{(1)} = 2/3$

$f_{22}^{(2)} = P(2 \to 1 \to 2) = 0$

$f_{22}^{(n)} = 0, \ n \geq 3.$ άρα $f_{22}^{*} = \frac{2}{3} < 1$ άρα παροδική

Άσκ Σπίτι: Τι κάνει το 0 και το 1